

**ИНТЕРНАУКА**  
*internauka.org*

Храмова Надежда Александровна

**КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ  
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ,  
КОНТАКТИРУЮЩЕЙ  
С ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ**

Монография

Москва  
2021

УДК 532.685

ББК 22.253

X895

**Рецензенты:**

*Перегудин С.И.*, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем ФГБОУ ВО " Санкт-Петербургский государственный университет";

*Тактаров Н.Г.*, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и методики обучения математике ФГБОУ ВО "Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева".

ISBN 978-5-6045842-6-2

**Храмова Н.А.**

**X895 «Колебательные движения вязкой жидкости, контактирующей с пористой средой»:** Монография: – Москва, Изд. «Интернаука», 2021. – 96 с.

Монография посвящена построению и исследованию математических моделей колебательных движений вязкой жидкости, контактирующей с пористой средой.

Исследование движения жидкостей, контактирующих с твердыми телами, представляет большой интерес для изучения ряда природных явлений, а также некоторых технологических процессов. Простейшими среди таких поверхностей являются плоскость, цилиндрическая и сферическая поверхности. Для случаев этих поверхностей при специальных предположениях удастся получить и проанализировать точные аналитические решения соответствующих задач. Течения, возникающие в вязкой жидкости при колебаниях, погруженных в нее пористых тел, обладают специфическими особенностями, отличающими их от течений, возникающих при колебаниях сплошных твердых тел в жидкости.

В связи с вышеизложенным, исследование течений вязкой жидкости, вызванных колебательным движением погруженного пористого шара и плоского слоя пористой среды, контактирующего с жидкостью, имеет большой теоретический и практический интерес и является актуальным. Подобные задачи с колеблющимися пористыми телами ранее не рассматривались в научной литературе.

ББК 22.253

ISBN 978-5-6045842-6-2

© Храмова Н.А., 2021  
© ООО «Интернаука», 2021

## СОДЕРЖАНИЕ:

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Течения вязкой жидкости, вызванные вращательно-колебательным движением пористого шара .....</b>	<b>10</b>
1.1. Построение математической модели .....	10
1.2. Решение краевой задачи .....	13
1.3. Анализ решения .....	17
<b>Глава 2. Течения вязкой жидкости, вызываемые поступательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара .....</b>	<b>28</b>
2.1. Математическая модель движения жидкости в неподвижной системе координат .....	28
2.2. Математическая модель движения жидкости в подвижной системе координат .....	32
2.3. Решение краевой задачи .....	34
2.4. Численный анализ модели .....	39
<b>Глава 3. Движение вязкой жидкости, вызванное поступательно-колебательным движением плоского слоя пористой среды .....</b>	<b>61</b>
3.1. Постановка задачи .....	61
3.2. Решение краевой задачи .....	65
3.3. Анализ решения .....	68
<b>Заключение .....</b>	<b>82</b>
<b>Список использованной литературы .....</b>	<b>84</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Монография посвящена построению и исследованию математических моделей колебательных движений вязкой жидкости, контактирующих с пористой средой.

Неподвижные твердые тела (как сплошные, так и пористые), погруженные в вязкую жидкость, влияют на характер движения обтекающей их жидкости. Твердые тела, движущиеся в вязкой жидкости, неподвижной на бесконечности, вызывают течения этой жидкости.

Исследование движения жидкостей, контактирующих с твердыми телами (как сплошными, так и пористыми), представляет большой интерес для изучения ряда природных явлений, а также некоторых технологических процессов. Среди этих приложений можно привести, например: удаление загрязняющих примесей из интегральных схем при изготовлении компьютеров, извлечение и хранение радионуклидов из отходов отработанных ядерных материалов. Все вышеперечисленное стимулирует исследование течений жидкости внутри и вне пористых тел, ограниченных различными поверхностями. Простейшими среди таких поверхностей являются плоскость, цилиндрическая и сферическая поверхности. Для случаев этих поверхностей при специальных предположениях удастся получить и проанализировать точные аналитические решения соответствующих задач. Течения, возникающие в вязкой жидкости при колебаниях, погруженных в нее пористых тел, обладают специфическими особенностями, отличающими их от течений, возникающих при колебаниях сплошных твердых тел в жидкости.

Пористая среда имеет большое количество пустот – пор, в связи с этим внутренняя поверхность пор, приходящаяся на единицу объема среды (удельная поверхность), может достигать очень больших значений. При течении жидкости через пористую среду она контактирует с твердой поверхностью на большой площади, что особенно важно, например, в химической промышленности, поскольку с увеличением площади контакта усиливается массообмен при химических реакциях.

Движение жидкости в объеме определяется условиями на ограничивающих ее поверхностях и называемых граничными условиями. Классическое граничное условие к уравнениям движения жидкости, контактирующей с твердой поверхностью, состоит в равенстве скоростей жидкости и твердой поверхности (условие прилипания).

Однако, как показали многочисленные эксперименты и теоретические исследования последнего времени, классическое граничное условие для скорости жидкости в некоторых случаях нуждается в определенных усложнениях, которые необходимо учитывать при изучении движения жидкостей в пористых средах. Например, на так

называемых супергидрофобных поверхностях, как существующих в природных условиях, так и созданных искусственно, жидкость проскальзывает, не прилипая к твердой поверхности. Аналогичные явления проскальзывания наблюдаются также вблизи твердой непроницаемой поверхности, ограничивающей пористую среду [109, 117, 125].

В связи с вышеизложенным, исследование течений вязкой жидкости, вызванных колебательным движением погруженного пористого шара и плоского слоя пористой среды, контактирующего с жидкостью, имеет большой теоретический и практический интерес и является актуальным. Подобные задачи с пористыми телами ранее не рассматривались в научной литературе.

Развитие теории волн на поверхности жидкости как самостоятельного раздела гидродинамики было начато благодаря работам С. Пуассона, О. Коши, Ж.Л. Лагранжа. Теорией волн занимались такие известные ученые, как Дж. Стокс, У. Кельвин, П. Лаплас, М.В. Остроградский, Дж. Рэлей, Г. Ламб и др.

Законы движения жидкостей через пористые среды приведены в работах [9, 40, 52, 62, 98].

При наличии свободной поверхности жидкости на ней могут возникать поверхностные волны, на распространение которых оказывает влияние пористая среда, контактирующая с жидкостью. Поверхностные волны в слое жидкости на пористом основании рассматривались, например в [89]. Наряду с поверхностными волнами в вязкой жидкости могут также существовать внутренние поперечные волны, вызванные колебанием погруженных в нее твердых тел. В частности, в [49] рассмотрены поперечные волны, вызванные движением плоской поверхности, контактирующей с жидкостью и совершающей колебания в своей плоскости, а также волны, возникающие при движении сплошного твердого шара, погруженного в жидкость и совершающего вращательные и поступательные колебания.

В работе [111] при использовании модели фильтрации Бринкмана решена задача об обтекании вязкой жидкостью пористого шара, находящегося в другой пористой среде. В [113, 124] с использованием модели фильтрации Дарси рассмотрена задача об обтекании неподвижного пористого слоя, ограниченного двумя концентрическими сферическими поверхностями. Задачи об обтекании непроницаемых сферы и цилиндра, находящихся в пористой среде, при использовании модели Бринкмана решены в [54]. В этой работе обращено внимание на то, что в модели фильтрации Бринкмана в качестве граничного условия на поверхности контакта пористой среды и непроницаемого твердого тела в общем случае вместо условия прилипания жидкости надо брать условие ее проскальзывания, аналогичное приведенному, например, в

[111]. В работе [90] при использовании нестационарного уравнения Бринкмана определено движение вязкой жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара.

Граничные условия на поверхности раздела пористой среды (матрицы) и насыщающей ее жидкости в случае, когда течение жидкости описывается уравнением Бринкмана [108], также отличаются от классического [120, 121].

Вывод уравнений движения вязкой жидкости через пористую среду методом локального объемного усреднения приведен, например, в [91, 120, 121, 132].

В работах [34 – 36] предлагаются численные алгоритмы решения задачи о нестационарной фильтрации вещества на основе метода Галеркина на неструктурированных треугольных сетках.

Распространение собственных крутильных и продольно-поперечных волн в бесконечной по длине вязкоупругой цилиндрической оболочке с вязкой жидкостью рассматривается в [74].

В работе [15] приведено модельное решение уравнения Бринкмана с учетом влияния неравномерности проницаемости упаковки на профиль скорости жидкости вблизи стенки.

Математические модели плоских периодических колебаний и стоячих поверхностных волн бесконечно глубокой жидкости при неоднородном распределении давления на ее свободной поверхности приведены в работах А.А. Абрашкина [1–3].

Линейное дисперсионное соотношение для волн на свободной поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости, покрытой упругой пленкой поверхностно-активного вещества выведено в статье [4]. В работах Ю.З. Алешкова рассмотрены нелинейные краевые задачи о распространении волн по свободной поверхности [5–7]. В статье В.А. Бабкина [8] получены точные решения задач: о ламинарном течении жидкости между параллельными плоскими стенками; о движении плоского пористого слоя между параллельными слоями вязкой жидкости; о ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале, ограниченном кольцевым пористым слоем. Краевая задача определения волнового движения, вызванного распространением гравитационной волны на свободной поверхности слоя двухфазной среды и решение линейной задачи о распространении волн по свободной поверхности вязкой жидкости приведены в работах [10–12, 105].

В работах Д. Ф. Белоножко [13–15] рассмотрены нелинейные волны на свободной поверхности идеальной и вязкой несжимаемой жидкости. В статье [39] предложена математическая модель изменения напряженно-деформированного состояния и эволюция нелинейных волн в насыщенных

пористых средах. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности слоя идеальной жидкости конечной толщины рассматриваются в [46]. Экспериментальное исследование перемешивания, вызванного стоячими поверхностными волнами в жидкости, проведено в работе [33].

В работах В. Т. Гринченко [21–22] изложены результаты исследования распространения волн и стационарных волновых процессов в упругих телах. Проведен анализ волновых полей в полупространстве, составном пространстве, бесконечных слое и цилиндре. Нестационарные упругие волны в пористых средах рассмотрены в [58, 59]. Замкнутая система определяющих уравнений для динамических и геометрических величин в насыщенной жидкостью неоднородной упругой пористой среде строится в рамках трехмерной теории упругости в работах [68, 69]. Задача о распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера рассматривается в работе [45].

Различные вопросы динамического взаимодействия упругих тел с потоком жидкости исследуются в [17–20]. В работах [106, 107] приведена теория распространения упругих волн в насыщенном жидкостью пористом твердом теле.

Зависимости от частоты скорости и коэффициентов затухания волн, распространяющихся вдоль плоской границы насыщенной пористой среды и газа, исследованы в [23–24]. Нелинейное уравнение для волн в пористых средах относительной жесткости, содержащей газ получено в работе [31]. Решение задачи о распространении поверхностных волн в насыщенных пористых средах рассматривается в статье [57]. Задача о медленном двумерном сдвиговом течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, частично заполненном волокнистой пористой средой решается в [61].

В работах Перегудина С.И. [63–67, 123] рассмотрены внутренние волны малой амплитуды, течение стратифицированной жидкости в канале переменной глубины, волны конечной амплитуды в двухслойной жидкости, исследованы трехмерные крупномасштабные движения невязкой несжимаемой стратифицированной идеальной электропроводящей вращающейся жидкости в сферическом экваториальном широтном поясе.

В монографии Холодовой С.Е. и Перегудина С.И. [97] рассматриваются задачи распространения волн в жидкости на поверхности сыпучей среды, а также в идеально проводящей сплошной среде.

Математические модели распространения различных типов поверхностных волн в твердых телах отражены в работах [16, 25, 43, 51, 55, 56, 71, 72, 76–83].

Движение твердых тел в колеблющейся жидкости, общие уравнения гидродинамики, использованные в монографии, описаны в работах [38, 44, 48, 50, 70, 75, 86–88, 100].

Математическое моделирование поверхностных волн в слое жидкости с поверхностным зарядом на пористом основании рассмотрено в работах С.М. Мироновой и Н.Г. Тактарова [60, 92]. Работы [32, 73, 93, 94] посвящены построению и исследованию математических моделей распространения и неустойчивости поверхностных волн в магнитных жидкостях с цилиндрическими поверхностями раздела. В [30] приводятся математические модели движения жидкости, в которых проявляется гидродинамическая неустойчивость, дается их теоретический анализ и описываются лабораторные эксперименты. Аналитические методы расчета линейной и нелинейной неустойчивости капиллярных волн на поверхности цилиндрических струй идеальных и вязких жидкостей приводятся в работе [99].

Дисперсионные характеристики инерционных волн в слое вязкой несжимаемой жидкости в полости быстровращающегося цилиндра исследованы в работах Н.В. Дерендяева, И.Н. Солдатова, В.М. Сандалова [26–28]. В работе [101] подробно анализируются различные типы межфазных условий между пористой средой и слоем жидкости.

В монографии Д. Джозефа [29] рассмотрены вопросы теории гидродинамической устойчивости, все виды течений жидкости и методы анализа их устойчивости.

Задача о растекании и впитывании жидкой капли, расположенной на поверхности пористого слоя решена в работах [37, 41, 42]. В работах [102, 103] рассматриваются уравнения Навье-Стокса с граничным условием Дирихле. О применении уравнения Бринкмана при решении задач говорится в работах [104, 108, 130].

Задачи исследования течений вязкой жидкости, вызванных вращательным колебательным движением погруженного в нее пористого шара, а также задача о движении вязкой жидкости, вызванного поступательно-колебательным движением плоского слоя пористой среды ранее не рассматривались в научной литературе.

### **Цели исследования**

Из вышеизложенного вытекает основная цель исследования: построение и исследование новых математических моделей течений вязкой жидкости, контактирующей с пористой средой, совершающей колебательные движения. В соответствии с поставленной целью решаются следующие задачи:

1) исследовать течения вязкой жидкости, вызванные вращательно-колебательным движением, погруженного в нее, пористого шара; получить точное аналитическое решение задачи и провести численный анализ этого решения; рассмотреть частные случаи задачи;



2) исследовать течения вязкой жидкости, вызываемые поступательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара; найти точное аналитическое решение задачи и провести его численный анализ;

3) исследовать движение вязкой жидкости, вызванное поступательно-колебательным движением плоского слоя пористой среды, контактирующего с жидкостью; найти точное аналитическое решение задачи; провести численный анализ этого решения; рассмотреть частные случаи задачи;

### **Научная новизна результатов работы**

Научная новизна определяется следующими, впервые полученными оригинальными результатами исследований:

1. Исследованы течения вязкой жидкости, вызванные вращательно-колебательным движением, погруженного в нее пористого шара (в областях внутри и вне шара).

2. Исследованы течения вязкой жидкости, вызываемые поступательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара.

3. Исследовано движение вязкой жидкости, вызванное поступательно-колебательным движением плоского слоя пористой среды, контактирующего с жидкостью.

4. В результате проведенных исследований найдены точные аналитические решения соответствующих задач и проведен их анализ, рассмотрены частные случаи.

### **Практическая и теоретическая значимость результатов работы**

Результаты исследований, проведенных в монографии, могут быть использованы для изучения природных явлений, а также для расчета некоторых технологических процессов и технических устройств, в которых используются пористые среды. Например, в аппаратах и процессах химической технологии, физических науках, науках о Земле, медицине и биологических науках. Полученные в работе результаты имеют и теоретическую значимость, являясь новыми разделами гидродинамики.

### **Достоверность результатов**

Достоверность результатов работы обоснована использованием хорошо известного нестационарного уравнения движения жидкости в пористой среде (модель Бринкмана), уравнения Навье-Стокса движения свободной жидкости и других уравнений гидродинамики, применением известных математических методов. Показано, что при определенных упрощающих предположениях из полученных результатов следуют известные ранее результаты для твердого непроницаемого шара и твердой пластины, совершающих вращательные колебательные движения в жидкости.

*Монография*

*Храмова Надежда Александровна*

# **КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ**

Подписано в печать 19.08.2021. Формат бумаги 60x84/16.  
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 6. Тираж 550 экз.

Издательство «Интернаука»  
125424, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 108, цокольный этаж,  
помещение VIII, комн. 4, офис 33  
E-mail: [mail@internauka.org](mailto:mail@internauka.org)

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного  
оригинал-макета в типографии Allprint  
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3